

A. Bergmann

Zum Analysisunterricht an den AHS

1. Einleitende Bemerkungen.

Im Mathematikunterricht sollte die Analysis weiterhin ein zentraler Bestandteil sein. In der Analysis wurden und werden sowohl für die Mathematik als für die Anwendungen in außermathematischen Bereichen vielfältige und komplexe Methoden entwickelt, die große Bedeutung zur Behandlung von Modellen für Anwendungssituationen haben. Die Wechselwirkung zwischen Mathematik und anderen Gebieten ist hier nicht nur von Anfang an vorhanden, sondern kann auch an vielen Stellen für den Unterricht genutzt werden. Die Analysis kann somit viel zu dem wesentlichen Ziel des Mathematikunterrichts beitragen, nämlich, es jedem Schüler zu ermöglichen, ein komplexes und tragfähiges Assoziationsgefüge von Aspekten, Begriffen, Methoden und Inhalten zu entwickeln. Auf einer solchen Grundlage sollte er dann jeweils in der Lage sein, an der Weiterentwicklung und an der Bearbeitung von Problemen mitzudenken und mitzuarbeiten. Auf diese Weise sollte der Schüler die Mathematik nicht als Aneinanderreihung von Tricks erleben, sondern als Bemühen, Mittel zu entwickeln, um Probleme mannigfacher Art zu lösen. Dazu ist es wichtig, auch im Unterricht die verschiedenen Aspekte, durch deren Zusammenwirken bzw. Wechselspiel sich die Mathematik entwickelt, jeweils mit der richtigen Gewichtssetzung zu berücksichtigen. Solche, oft falsch als Gegensätze bezeichneten, Aspekte sind z. B.

strukturelle Gesichtspunkte	-	konstruktives Vorgehen,
Darstellung	-	Inhalt
Reine Mathematik	-	anwendungsorientierte Mathematik
Verständnis	-	Kalkül (Handwerkszeug)

oder die heute oft als Gegensätze diskutierten Gesichtspunkte

Mathematik in "bisheriger Weise" gegenüber
algorithmischem Vorgehen und Denken.

Falsche Gewichtsetzungen durch Überbetonung eines dieser Aspekte haben entscheidend zu den verschiedenen Fehlentwicklungen des Mathematikunterrichts in der jüngsten Vergangenheit beigetragen. Das sollte man bei allen heutigen Diskussionen über "Computer und Mathematikunterricht" bedenken.

Der Analysisunterricht sollte noch stärker davon wegkommen, übliche Hochschulkurse zu kopieren. An jeder Stelle des Unterrichts sollte besonderer Wert darauf gelegt werden, den Kern des jeweiligen Sachverhalts herauszuarbeiten, wenn möglich, unter verschiedenen Gesichtspunkten. Dies soll am Beispiel der Differenzierbarkeit und der Erörterung der Sätze über das globale Verhalten differenzierbarer Funktionen besprochen werden.

In der Analysis (soweit sie für den Unterricht relevant ist) wurden, grob gesprochen, Begriffe und Methoden entwickelt, um Funktionen qualitativ und quantitativ besser unterrichten zu können. Dabei kann eine Funktion schon irgendwie "explizit vorgegeben" sein, oder es kann sich um Funktionen handeln, für die gewisse Bedingungen bekannt sind (z.B. Differentialgleichungen). Es mußten dazu u.a. Begriffe und Methoden zur Erörterung folgender Sachverhalte entwickelt werden:

- 1) Änderungstendenz einer Funktion in einem Punkt (Ableitung, Tangente).
- 2) Globale Eigenschaften differenzierbarer Funktionen.
- 3) Definition und Untersuchung von Funktionen, die man ggf. durch Grenzprozesse aus gegebenen Funktionen erhält, wenn die "Blicksichtung" entgegengesetzt zu 1) ist (Integralrechnung).

Daher sind im Analysisunterricht zu behandeln:

- 1) Differenzierbarkeit (Tangente);
- 2) Globales Verhalten differenzierbarer Funktionen;
- 3) Anwendungen von 2) (zentraler Teil der Differentialrechnung) z.B. Extremwerte, Konvexität, Approximation durch Polynome (Taylorsche Sätze);

- 4) Integralrechnung;
- 5) Zusammenhänge zwischen diesen Teilen, soweit nicht schon in der Entwicklung selbst berücksichtigt.

Der Integralbegriff sollte auch als eigenständiger Begriff behandelt werden, damit er u.a. besser für Anwendungssituationen verwendet werden kann. Dort stößt man oft auf Größen, die durch Ausdrücke der Gestalt $\sum g(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$ approximiert werden können. Unter den zu besprechenden Funktionen sollten in jedem Fall neben den rationalen und Potenzfunktionen (mit rationalen Exponenten) die Exponential- und Logarithmusfunktion sowie die trigonometrischen und ihre Umkehrfunktionen sein.

Dies betrachte ich als Minimalprogramm. Es kann m.E. verwirklicht werden, wenn man ggf. an gewissen Stellen gute Plausibilitätsbetrachtungen verwendet, die den Kern des Sachverhalts deutlich werden lassen (und nicht verdecken). Außerdem sollte kein Vorspann über Stetigkeit und Grenzwert erfolgen. Der Kurs sollte so konzipiert sein, daß man möglichst direkt die Behandlung der globalen Sätze anstrebt. Diese ermöglichen es dann, Analysis in vielfältiger und beziehungsreicher Art zu betreiben. Also hat man zuerst die Differenzierbarkeit, nämlich die Präzisierung dessen, was als Änderungstendenz in einem Punkt angesehen werden kann, zu erörtern. Dabei muß dann der Grenzwertbegriff entwickelt werden, weil nur mit seiner Hilfe diese Präzisierung so geleistet werden kann, daß man damit weiterarbeiten kann. Für den Schüler wird m.E. auf diese Weise deutlich, daß der Grenzwertbegriff unabdingbar ist. Dieser für die Mathematik zentrale Begriff muß im Unterricht so umfassend behandelt werden, daß jeder Schüler in der Lage sein sollte, ihn mit eigenen Worten ungefähr in folgender Weise zu formulieren:

" $H(x)$ strebt gegen γ für $x \rightarrow x_0$ (hat den Grenzwert γ für $x \rightarrow x_0$) genau dann, wenn es zu jeder vorgegebenen Fehler-schranke um γ eine Umgebung von x_0 gibt, so daß für alle x ($x \neq x_0$) aus dieser Umgebung die Abweichung des Funktionswertes $H(x)$ von γ kleiner (oder gleich) der vorgegebenen Fehler-schranke ist."

Im folgenden sollen zuerst verschiedene Gesichtspunkte (vor allem auch geometrische) besprochen werden, die bei der Hinführung zum Ableitungs- bzw. Tangentenbegriff verwendet werden können. Die daraus folgenden Ergebnisse über das lokale (punktuelle) Verhalten einer in x_0 differenzierbaren Funktion sollen dann dazu benutzt werden, die Sätze über das globale Verhalten differenzierbarer Funktionen zu erörtern. Diese problematische Stelle des Analysisunterrichts soll ausführlicher besprochen werden. Die folgenden Erörterungen sind nicht als Patentrezept zu verstehen. Ein solches gibt es für keinen Teil des Mathematikunterrichts. Sie sind als Anregung gedacht, im Sinne der eingangs erwähnten allgemeinen Gesichtspunkte immer wieder darüber nachzudenken, wie man den Kern eines Sachverhalts gut herausarbeiten kann.

2. Zum Ableitungs- bzw. Tangentenbegriff (lokales Verhalten).

Da die analytischen Gesichtspunkte für mögliche Zugänge zum Ableitungsbegriff bekannter sind, bespreche ich zuerst geometrische Aspekte, unter denen der Tangentenbegriff erarbeitet werden kann. Entgegen verschiedenen Tendenzen in der didaktischen Literatur vertrete ich die Meinung, daß die intuitiven Vorstellungen wirklich präzisiert werden müssen, um den Tangentenbegriff zu fixieren bzw. zu definieren. Er ist, wenn man eine enge Koppelung zu analytischen Überlegungen im Auge hat, nur durch Grenzprozesse zu erfassen. Dies sollte im Unterricht auch deutlich werden. (Den Zugang über die Stützgeradeneigenschaft für konvexe Funktionen behandle ich nicht, weil der Übergang zu den analytischen Betrachtungen aufwendiger ist).

Als Tangente in $(x_0, f(x_0))$ soll eine Gerade ausgezeichnet werden, die die "Richtung" (des Graphen) von f in x_0 beschreibt. Dies ist die geometrische Deutung der Frage nach der Änderungstendenz von f in x_0 .

Der bekannteste Zugang ist die Betrachtung der Steigungen der Sekanten von $(x_0, f(x_0))$ aus. Gibt es einen Grenzwert der Sekanten-

steigungen für $x \rightarrow x_0$, so soll diese (geometrische) Eigenschaft von f in $x_0 \in T_1$ heißen.

Ein zweiter Zugang ergibt sich durch folgende Vorbetrachtungen:

- a) Was kann als Richtung der Bahn eines Teilchens, das sich in einer strömenden Flüssigkeit befindet, in einem Punkt P_0 angesehen werden? In einem Gedankenexperiment denke man sich einen porösen Doppelkreisegel, dessen Öffnung beliebig verändert werden kann, mit der Spitze in P_0 in die Flüssigkeit eingebracht. Die Schüler können sich sicher ohne große Schwierigkeiten vorstellen, daß sie in einem Boot sitzend (und alles entsprechend verkleinert) das Teilchen repräsentieren. In P_0 passiert das Boot also die "Spitze" des Doppelkegels. Dann wird man sich einigen können, als Richtung der Teilchenbahn in P_0 die Richtung der Achse des Doppelkegels zu bezeichnen, wenn folgende Situation vorliegt: Bei fixierter Stellung der Achse bleibt das Teilchen bei jeder beliebig kleinen Öffnung des Kegels sowohl vor als nach P_0 eine Zeitlang ganz im Doppelkegel. Dies Bahnstück um P_0 hängt natürlich von der Öffnung des Doppelkegels ab. Für die obige Vorstellung bedeutet das: Das Boot verläßt eine Zeit lang vor Erreichen von P_0 bis nach dem Passieren von P_0 den Doppelkegel nicht (bei beliebiger Öffnung!).
- b) Ein Radfahrer fahre bei Dunkelheit auf der Begrenzungslinie einer Straße. Die Lampe besitze einen variablen Lichtkegel. Die Achse sei durch die obere Rahmenstange festgelegt. Leuchtet bei einer bestimmten Stellung der Achse der Lichtkegel bei beliebig kleiner Öffnung immer noch ein ganzes Stück der Begrenzungslinie aus, so wird man die Richtung der Achse als "Vorwärtsrichtung" der Begrenzungslinie ansehen können. Gilt das entsprechend bei derselben Achsenstellung auch rückwärts, so kann man die Richtung der Achse (eigentlich die der Projektion auf die Begrenzungslinie) als Richtung der Begrenzungslinie in dem entsprechenden Punkt betrachten.

Im Anschluß an diese Vorbetrachtungen definieren wir daher:

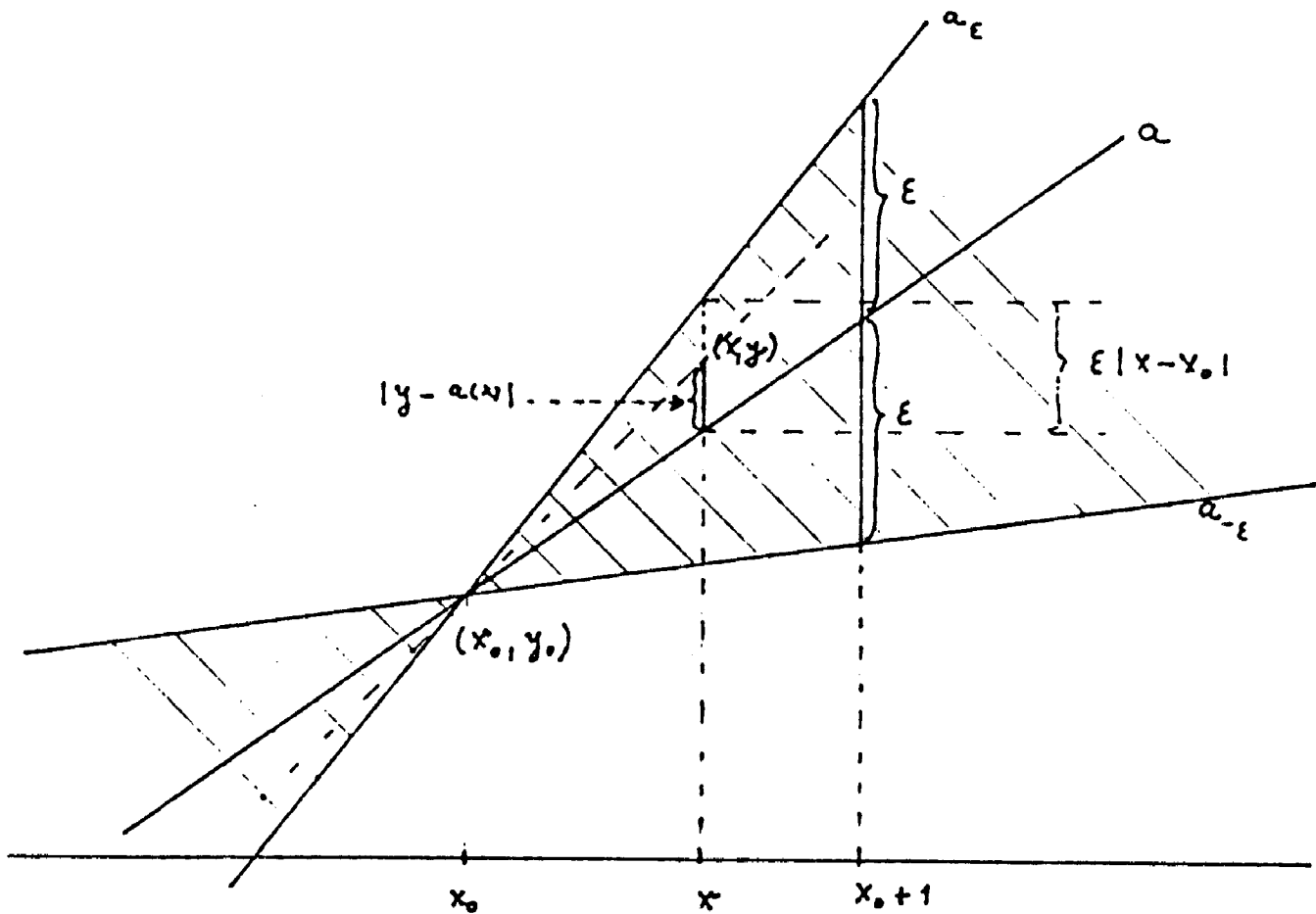
Definition. a sei die lineare Funktion $a(x) := y_0 + m(x-x_0)$;
 $\epsilon > 0$ eine reelle Zahl.

Die Punktmenge

$$S_\epsilon((x_0, y_0); a) := \{ (x, y) \mid |y - a(x)| \leq \epsilon |x - x_0| \}$$

$$= \{ (x, y) \neq (x_0, y_0) \mid \frac{|y - a(x)|}{|x - x_0|} \leq \epsilon \} \cup \{ (x_0, y_0) \}$$

heißt Sektor mit der Achse a und der Öffnung ϵ . (vgl. Figur)

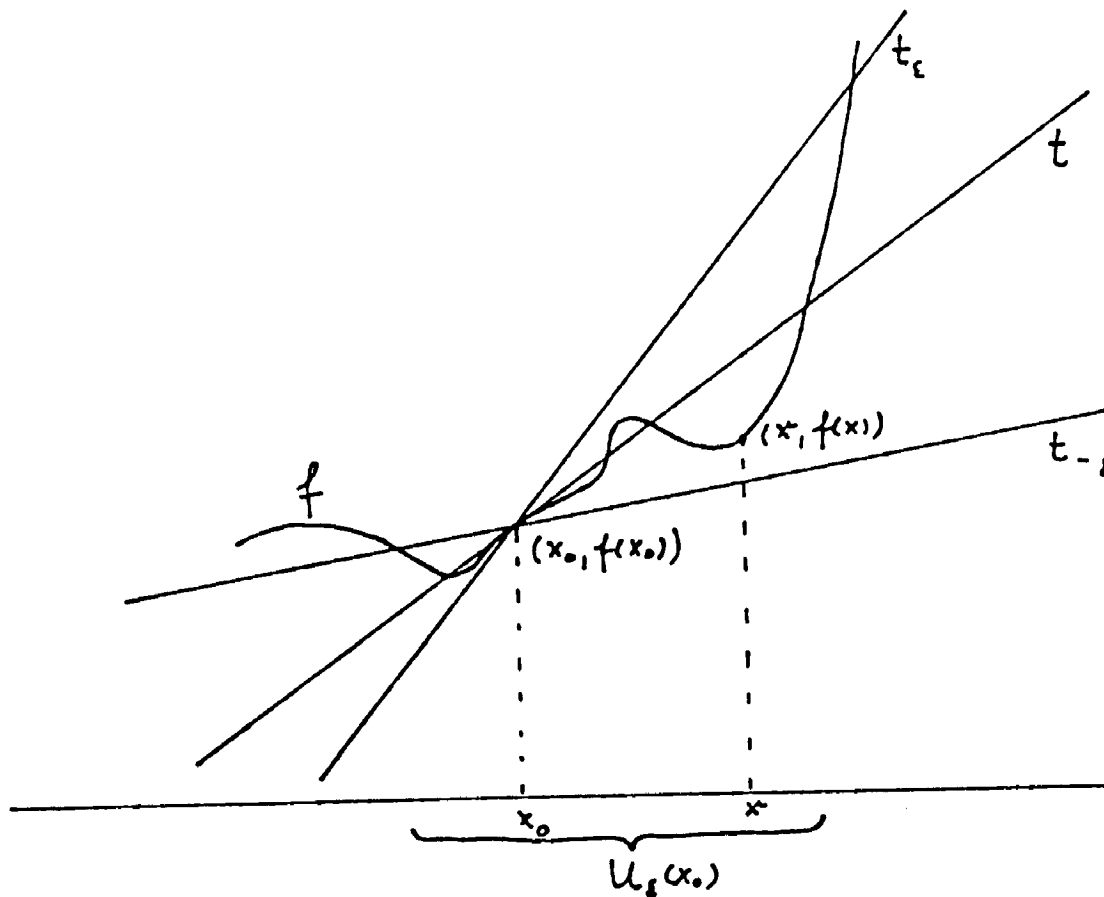


Bem.: Die Randgeraden des (Doppel-) Winkelraums werden mit a_ϵ bzw. $a_{-\epsilon}$ bezeichnet:

$$a_{\pm\epsilon}(x) := y_0 + (m \pm \epsilon)(x - x_0).$$

Der Sektor ist nicht symmetrisch um die Achse a gewählt, um den Übergang zu den analytischen Betrachtungen zu erleichtern. Statt des abgeschlossenen Sektors hätte man auch den offenen Sektor wählen können.

Definition. $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in [a,b]$ die Sektoreigenschaft $T_2 \iff$ Es gibt eine lineare Funktion t ($t(x) = f(x_0) + m(x-x_0)$), so daß für alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ existiert, derart, daß für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap [a,b]$ der Punkt $(x, f(x))$ in $S_\varepsilon((x_0, f(x_0)); t)$ liegt. (vgl. Figur)

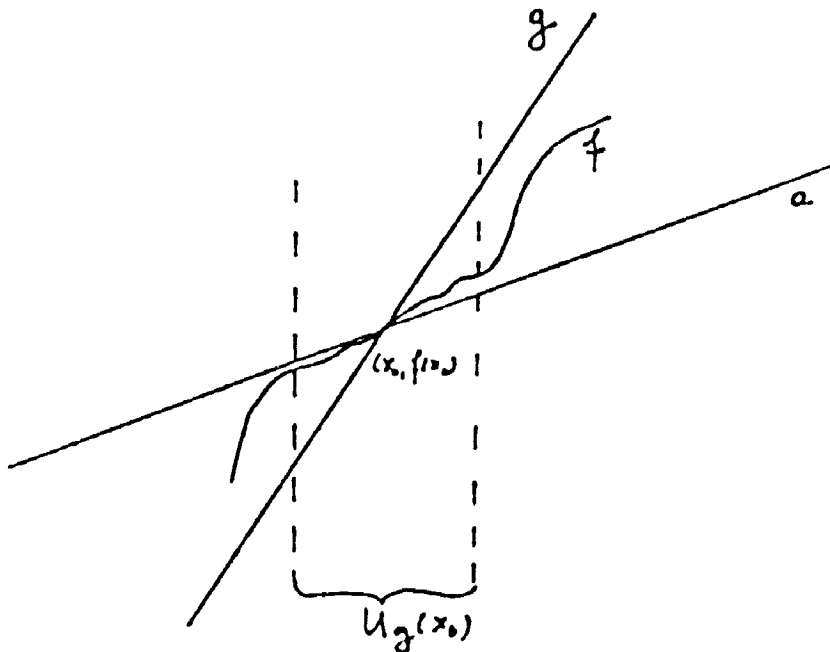


Bem.: Von den Sekantensteigungen her gesehen, bedeutet T_2 :
 $\forall x \in U_\epsilon(x_0)$ liegt die Sekante von $(x_0, f(x_0))$ aus
durch $(x, f(x))$ in $S_\epsilon((x_0, f(x_0)); t)$.

Als ein dritter Gesichtspunkt soll kurz folgender erwähnt werden:
Man zeichne eine Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ dann aus, wenn sie in
folgendem Sinn f in x_0 besser approximiert als andere Geraden:

Definition. Die lineare Funktion a ($a(x) = f(x_0) + n(x-x_0)$)
approximiert f in x_0 lokal optimal (bezüglich aller linearen
Funktionen durch $(x_0, f(x_0))$) genau dann, wenn es zu jeder linearen
Funktion g ($g(x) = f(x_0) + k(x-x_0)$) eine Umgebung $U_g(x_0)$ gibt, so
daß für alle $x \in U_g(x_0)$ gilt:

$$| f(x) - a(x) | \leq | f(x) - g(x) |$$

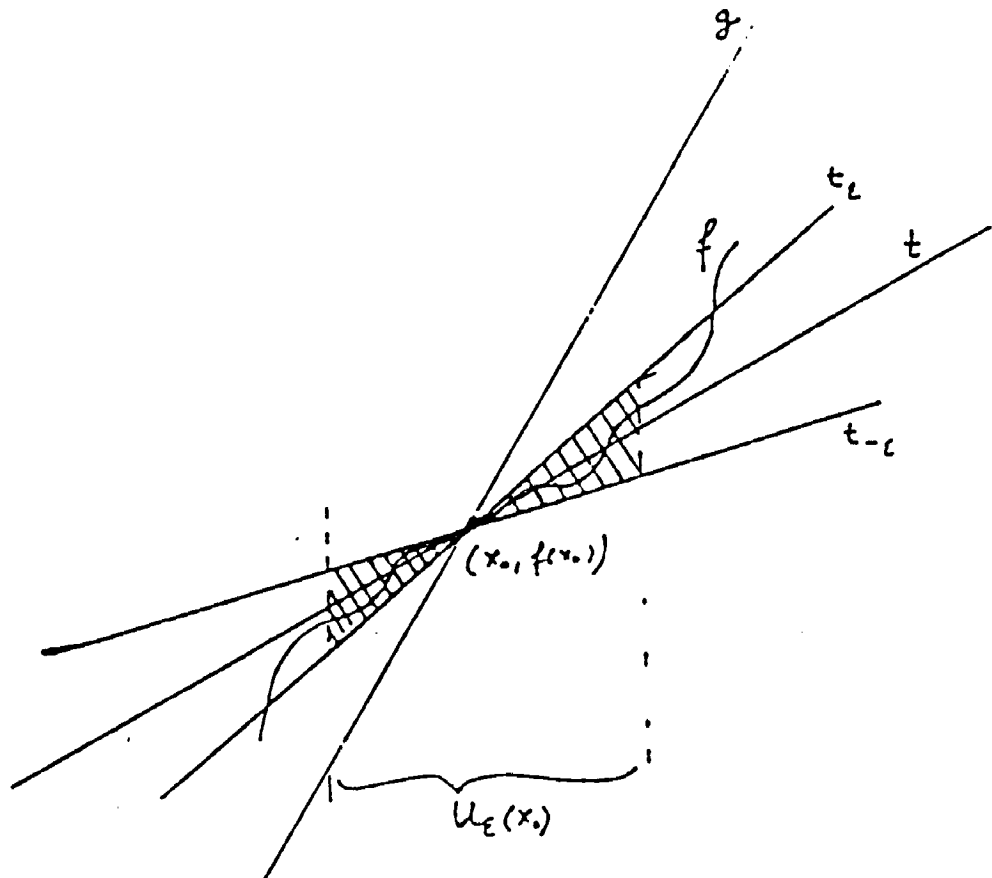


Definition. $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in [a,b]$. f hat in x_0 die Eigenschaft $T_3 \longleftrightarrow$. Es gibt eine lineare Funktion t ($t(x) = f(x_0) + n(x-x_0)$), die f in x_0 bezüglich aller linearen Funktionen durch $(x_0, f(x_0))$ lokal optimal approximiert.

Es gilt dann

Satz. T_1 , T_2 und T_3 sind äquivalent. Es wird jeweils dieselbe Gerade ausgezeichnet.

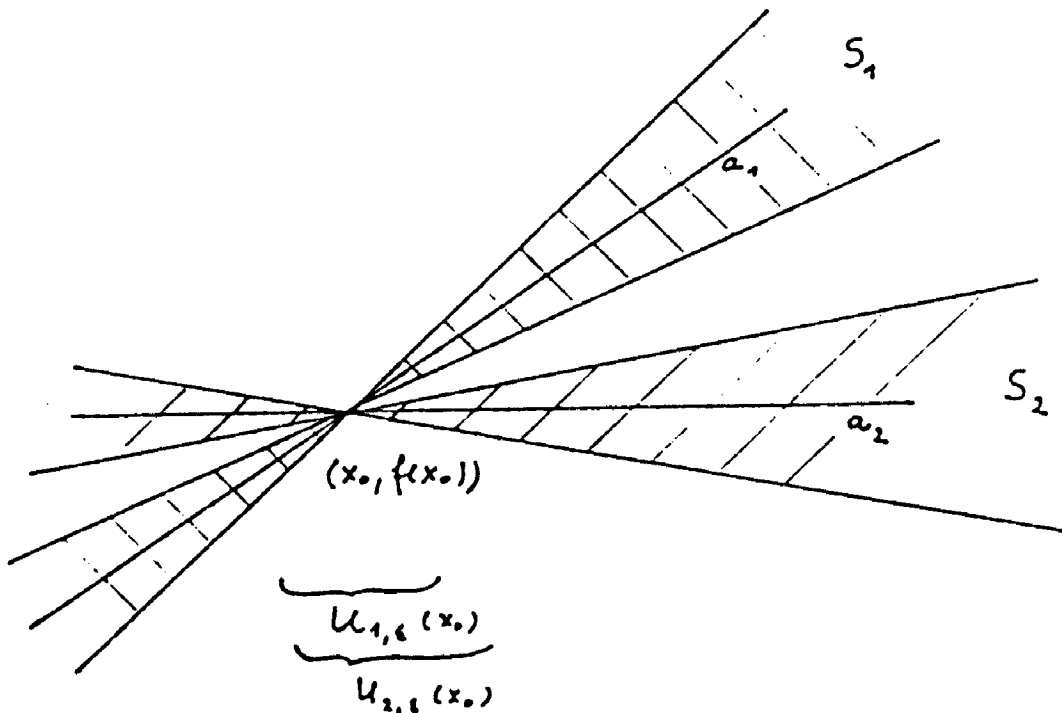
- Beweis: 1) $T_1 \longleftrightarrow T_2$, da T_2 geometrisch gerade ausdrückt, daß T_1 gilt. Die Achse gemäß T_2 hat als Steigung den Limes der Sekantensteigungen gemäß T_1 .
- 2) $T_2 \longleftrightarrow T_3$. Es gilt zusätzlich, daß die Achse gemäß T_2 mit der lokal optimal approximierenden Geraden gemäß T_3 übereinstimmt. Der Kürze halber sei dies hier nur für $T_2 \rightarrow T_3$ anhand folgender Figur plausibel gemacht:



Bei der gezeichneten Lage von t (Achse gemäß T_2) und einer beliebigen Gerade g wähle man $\epsilon > 0$ so, daß die Punkte von t_ϵ größeren vertikalen Abstand von g haben als von t (für $x > x_0$). Dann haben die Punkte von $S_\epsilon((x_0, f(x_0)); t)$ kleineren vertikalen Abstand von t als von g . In $U_\epsilon(x_0)$ gemäß T_2 verläuft f in $S_\epsilon((x_0, f(x_0)); t)$. Daher gilt für alle $x \in U_\epsilon(x_0)$:

$$| f(x) - t(x) | \leq | f(x) - g(x) | .$$

Geometrisch ist auch unmittelbar zu sehen, daß es nur eine Achse a geben kann, so daß f die Eigenschaft T_2 in x_0 besitzt (vgl. Figur).



Seien a_1 und a_2 zwei Achsen, so daß T_2 gilt. Dann wähle man $\epsilon > 0$ so, daß $S_1 := S_\epsilon((x_0, f(x_0)); a_1)$ und $S_2 := S_\epsilon((x_0, f(x_0)); a_2)$ nur $(x_0, f(x_0))$ als Durchschnitt haben. Dann müßte es gemäß T_2 Umgebungen $U_{1,\epsilon}(x_0)$ und $U_{2,\epsilon}(x_0)$ geben, so daß $f|_{U_{1,\epsilon}}$ in S_1 und $f|_{U_{2,\epsilon}}$ in S_2 verläuft, was nicht möglich ist.

Besitzt f in x_0 eine (und damit alle) der Eigenschaften T_1 , T_2 oder T_3 , so heißt die entsprechend ausgezeichnete Gerade Tangente. Da nach den obigen Betrachtungen immer dieselbe Gerade ausgezeichnet wird, hat man unter allen obigen Aspekten eine und dieselbe Gerade als Tangente definiert.

Analytische Gesichtspunkte zum Erfassen der Änderungstendenz von $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in [a,b]$ sind:

- 1) Das Verhalten der Änderungsrate $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x \rightarrow x_0$.
- 2) Die Approximation von f durch eine lineare Funktion t in x_0 (im Sinne eines bestimmten Verhaltens des relativen Fehlers).
- 3) Die Darstellung von $f(x) - f(x_0)$ als $(x-x_0)q(x)$ (nahegelegt durch das Verhalten von Polynomfunktionen bzw. durch Näherungsrechnungen).
- 4) Approximation von f in x_0 durch eine lineare Funktion wie bei T_3 oben.

Daher definieren wir für $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$:

f hat die Eigenschaft

- $D_1 \longleftrightarrow$ Die Differenzenquotientenfunktion $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hat einen Grenzwert für $x \rightarrow x_0$;
- $D_2 \longleftrightarrow$ Es gibt eine lineare Funktion t ($t(x) = f(x_0) + m(x-x_0)$), so daß gilt: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)-t(x)|}{|x-x_0|} = 0$
(d.h. " t approximiert f in x_0 von 1. Ordnung"),
- $D_3 \longleftrightarrow$ Es gibt eine in x_0 stetige Funktion q , so daß $f(x) - f(x_0) = (x-x_0)q(x)$,
- $D_4 \longleftrightarrow$ f hat die Eigenschaft T_3 .

Es gilt der

Satz. D_1, D_2, D_3, D_4 sind äquivalent. Weiter gilt u.a.:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist gleich der Steigung der linearen Funktion t gemäß D_2 und gleich $q(x_0)$ gemäß D_3 . Die lokal optimal

approximierende lineare Funktion nach D_4 stimmt mit t nach D_2 überein.

Man definiert dann: f ist in x_0 differenzierbar \longleftrightarrow f erfüllt eine (und damit alle) der Eigenschaften D_i ($i=1, \dots, 4$). t gemäß D_2 heißt Tangente in x_0 .

Beziehungen zwischen den analytischen und geometrischen Gesichtspunkten:

T_1 ist die geometrische Deutung von D_1 und umgekehrt. Dies gilt entsprechend für T_2 und D_2 . T_2 ist ja der geometrische Ausdruck für D_2 (Strahlensatz).

Es gilt daher:

Satz. $D_1, D_2, D_3, D_4, T_1, T_2$ und T_3 sind äquivalent. Die durch die T_i ausgezeichnete Gerade t stimmt mit der durch D_2 ausgezeichneten linearen Funktion überein.

Für die weiteren Betrachtungen halten wir also die wichtige Tatsache fest, daß die Differenzierbarkeit von f in x_0 mit der geometrisch durch die Sektoreigenschaft T_2 ausgedrückten Eigenschaft von f in x_0 äquivalent ist. Dies kann man an vielen Stellen des Unterrichts ausnutzen (was im Vortrag aus Zeitgründen nicht ausgeführt werden kann).

Bemerkung: Eine in x_0 differenzierbare Funktion f wird im Sinne von T_2 an die Achse t in x_0 "herangedrückt": Zu jeder beliebig kleinen Öffnung $\varepsilon > 0$ des Sektors gibt es eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$, so daß $f|_{U_\varepsilon(x_0)}$ ganz im Sektor $S_\varepsilon((x_0, f(x_0)); t)$ verläuft.

Diese grundlegende Vorstellung sollte vermittelt werden. Dabei beachte man, daß man durch T_2 zwar die Änderungstendenz von f in x_0 beschrieben hat (wenn f diese Eigenschaft besitzt), daß dadurch aber nur eine sehr grobe Aussage darüber gemacht wird, wie sich f in einer festen Umgebung von x_0 verhält. Es gibt z.B. Funktionen, die in x_0 zwar die Sektoreigenschaft besitzen, aber in jeder Umgebung von x_0 oszillieren.

Man nehme $f(x) = \begin{cases} 1/2x + x^2 \sin 1/x & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

die in $x_0 = 0$ die Sektoreigenschaft T_2 bezüglich $t(x) = \frac{1}{2}x$ besitzt. f oszilliert in jeder Umgebung von 0 zwischen den beiden Parabeln $\frac{1}{2}x + x^2$ und $\frac{1}{2}x - x^2$.

Aus den bisherigen Überlegungen folgt sofort

Satz (Lokaler Vergleichssatz)

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in [a,b]$ differenzierbar.

a) Gilt $f'(x_0) > 0$, so gibt es eine Umgebung $U(x_0)$, derart, daß für alle $x \in U(x_0)$ gilt:

$$\begin{aligned} x_0 < x &\Rightarrow f(x_0) < f(x), \\ x < x_0 &\Rightarrow f(x) < f(x_0). \end{aligned}$$

b) Gilt für $s, S \in \mathbb{R}$ $s < f'(x_0) < S$, so gibt es eine Umgebung $U(x_0)$, so daß für alle $x \in U(x_0)$ gilt:

$$\begin{aligned} x_0 < x &\Rightarrow s(x-x_0) < f(x)-f(x_0) < S(x-x_0), \text{ also} \\ &f(x_0)+s(x-x_0) < f(x) < f(x_0) + S(x-x_0); \\ x < x_0 &\Rightarrow s(x-x_0) > f(x)-f(x_0) > S(x-x_0), \text{ also} \\ &f(x_0)+s(x-x_0) > f(x) > f(x_0) + S(x-x_0). \end{aligned}$$

Zur geometrischen Deutung vergleiche man den Beweis.

Beweis von b) (vgl. Figur).

Nach Voraussetzung verläuft die Tangente t in x_0 im offenen (Doppel-) Winkelraum W von $(x_0, f(x_0))$ aus mit den Randgeraden

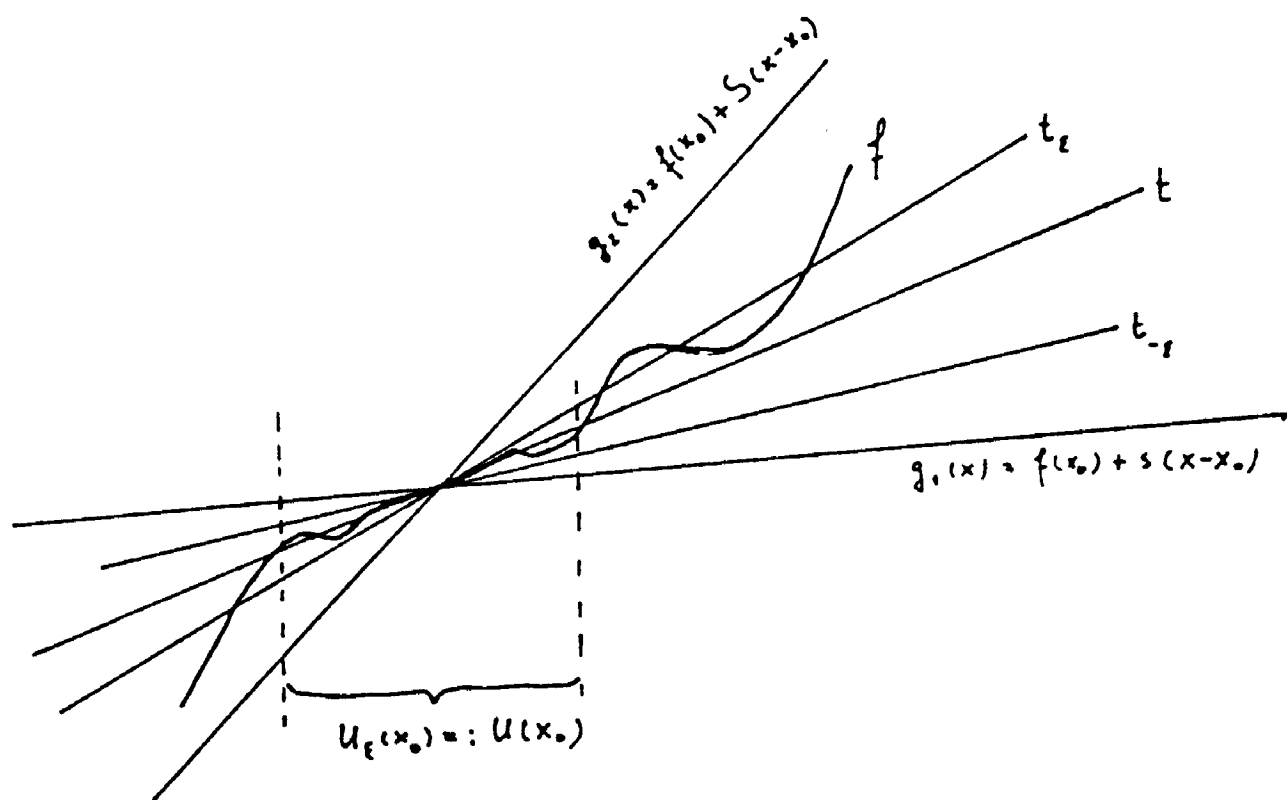
$$g_1: (g_1(x) = f(x_0) + s(x-x_0)) \text{ und } g_2: (g_2(x) = f(x_0) + S(x-x_0)).$$

Man wähle $\epsilon > 0$ so, daß der Sektor $S_\epsilon((x_0, f(x_0)); t)$ ganz in W liegt.

Dann gibt es nach T_2 eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$, so daß $f|_{U_\epsilon(x_0)}$ ganz in $S_\epsilon((x_0, f(x_0)), t)$, also ganz in W verläuft.

Nehme $U_\epsilon(x_0)$ als $U(x_0)$. Die geometrische Bedeutung von b) ist also, daß es $U(x_0)$ gibt, so daß $f|_{U(x_0)}$ ganz im offenen (Doppel-) Winkel-

raum von $(x_0, f(x_0))$ aus verläuft, der durch die Randgeraden mit den Steigungen s und S festgelegt wird.



Für später seien folgende, für den Unterricht wichtige, andere Deutungen für den Teil b) des lokalen Vergleichssatzes festgehalten:

(I) Es gibt eine Umgebung $U(x_0)$, so daß die Steigungen der Sekanten von $(x_0, f(x_0))$ aus durch $(x, f(x))$ ($x \in U(x_0)$) auch zwischen s und S liegen.

(II) Es gibt $U(x_0)$, so daß $f|_{U(x_0)}$ "zwischen" den linearen Funktionen g_1 und g_2 verläuft. Dabei sind g_1, g_2 Funktionen mit den Ableitungen s und S in jedem Punkt. Man vergleicht also in $U(x_0)$, etwas anders geschrieben, die Zuwächse von f zwischen x und x_0 mit denen von $s \cdot x$ bzw. $S \cdot x$.

Beide Deutungen erhält man, indem man denselben Sachverhalt unter ganz verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet. Solche Wechsel des

Aspekts (die rein mathematisch oft nur aus geringfügigen "algebraischen" Umformungen entstehen) sind für den Unterricht besonders wichtig. Dadurch kann man den Schülern zum Aufbau eines in der Einleitung angesprochenen reichhaltigen Assoziationsgeflechts verhelfen.

Als Konsequenzen der Überlegungen zur Hinführung zum Ableitungs- bzw. Tangentenbegriff sehe ich folgende: Man wird (natürlich anhand von Beispielen und so weit möglich ausgehend von Anwendungssituationen oder anderen Problemen) zuerst einen bestimmten der obigen analytischen oder geometrischen Aspekte zur Entwicklung der Fragestellung und ihrer Bearbeitung in den Mittelpunkt stellen und dann die Beziehung zu anderen Aspekten (als Sätze) erörtern. Frühzeitig sollte man den jeweils zugeordneten geometrischen bzw. analytischen Aspekt (je nachdem, ob man analytisch oder geometrisch beginnt) mit in die Betrachtungen einbeziehen. Am Ende sollte jedenfalls unter den analytischen Aspekten D_1 und D_2 auf jeden Fall bekannt sein. D_1 ist wichtig, weil man von den Anwendungen her oft auf ihn stößt und weil dieser eine "Handlungsanweisung" zur Berechnung der Ableitung beinhaltet. In dieser Hinsicht ist D_2 "abstrakter". Zur Herleitung der Differentiationsregeln und vor allem zu Vorbetrachtungen dazu ist D_2 von großem Vorteil. Hinzu kommt, daß durch D_2 der wichtige Aspekt der Approximation, der für die gesamte Mathematik eine große Rolle spielt (auch im Hinblick auf Anwendungen), bewußt gemacht wird. Von den geometrischen Gesichtspunkten halte ich den, der zur Sektoreigenschaft führt, für so wichtig, daß T_2 (z.B. auch als geometrische Deutung von D_2) auf jeden Fall angesprochen werden sollte. Daß in diesem Abschnitt der Grenzwertbegriff zu erarbeiten ist, habe ich oben schon gesagt.

3. Globale Eigenschaften differenzierbarer Funktionen.

Die zu besprechende Problemstellung lautet: Welche Eigenschaften besitzt f , wenn f' gewisse Eigenschaften besitzt? Im Unterricht sollte deutlicher als das i.a. geschieht, herausgearbeitet werden, daß man von Kenntnissen über die Änderungstendenz von f in jedem

Punkt auf Eigenschaften über den globalen Verlauf von f schließen will. Ich bespreche hier absichtlich einen anderen Weg als den vielfach begangenen, bei dem man so vorgeht: Mit Hilfe des Satzes vom Maximum für stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall erschließt man den Satz von Rolle und daraus (mit einer Hilfsfunktion) den Mittelwertsatz (MWS). M.E. wird bei einem solchen Vorgehen und durch die anschauliche Bedeutung des Mittelwertsatzes sowie seiner Formulierung nicht deutlich genug, daß man eigentlich die eingangs formulierte Fragestellung erörtern will (nämlich von f' auf f zu schließen). Erst durch weitere Betrachtungen ergibt sich bei dem üblichen Weg, daß man mit dem MWS ein starkes Hilfsmittel besitzt, globale Eigenschaften differenzierbarer Funktionen herzuleiten. Man könnte die Behandlung des Mittelwertsatzes natürlich so gestalten, daß von vornherein deutlich wird, daß er als Antwort auf die obige Fragestellung erscheint.

Am Beispiel der Herleitung des Schrankensatzes soll im folgenden gezeigt werden, daß man im Unterricht sowohl die Problemstellung als auch die Schwierigkeiten, die zum Beweis überwunden werden müssen, so erörtern kann, daß die Schüler ein gutes Verständnis für diesen Sachverhalt entwickeln und dadurch hier und später gut mitarbeiten zu können.

$f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar, $[a,b]$ ein kompaktes Intervall.

Monotoniesatz. Gilt $f' > 0$, so gilt für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$ oder $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Schrankensatz. Gibt es $s, S \in \mathbb{R}$ mit $s < f' < S$, so gilt für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$:

$$s(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1) < S(x_2 - x_1)$$

oder umgeschrieben:

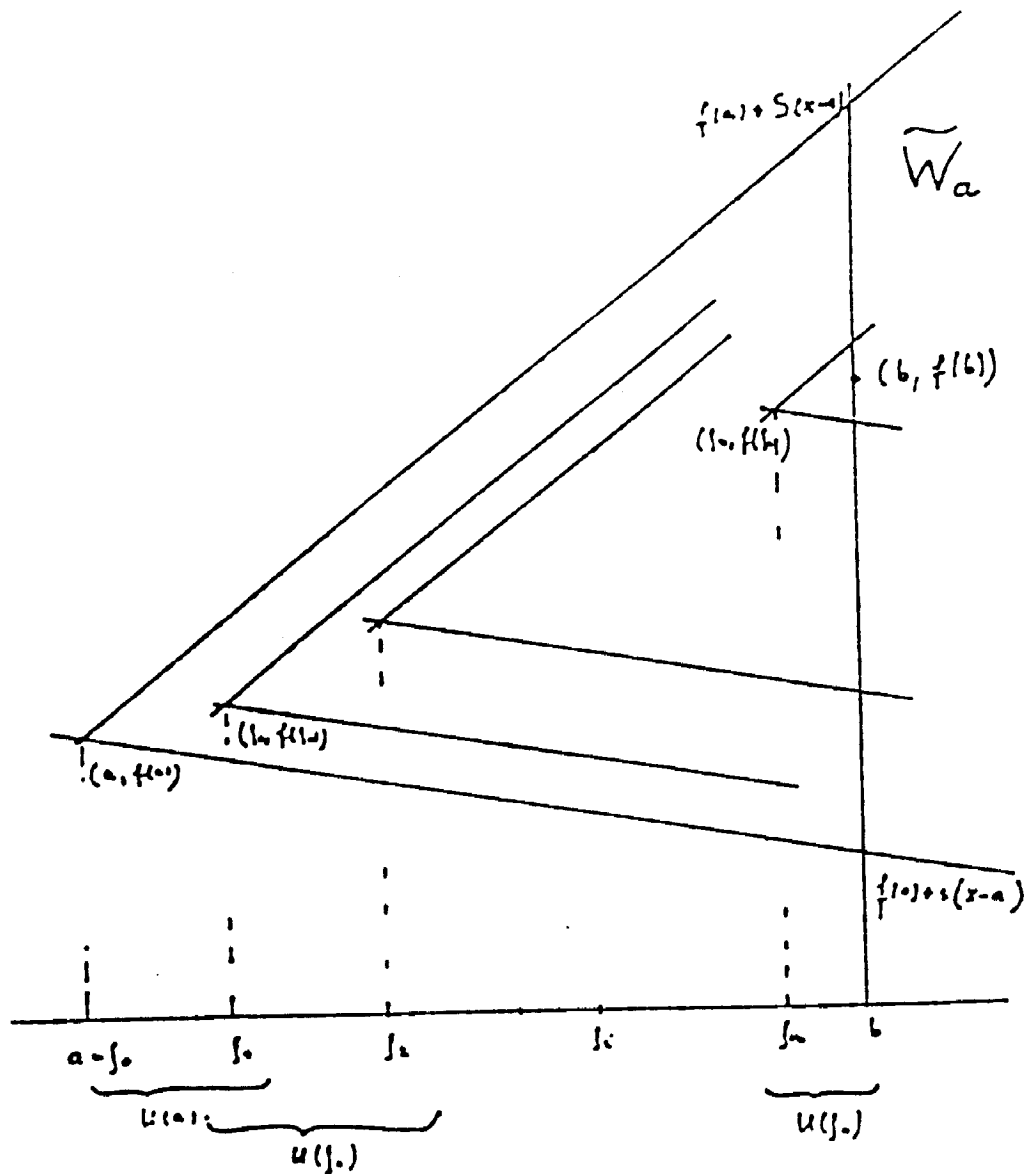
$$f(x_1) + s(x_2 - x_1) < f(x_2) < f(x_1) + S(x_2 - x_1).$$

Leitet man zuerst den Monotoniesatz her (man kann darüber diskutieren, ob er für die Schüler etwas einfacher zu erfassen ist), so erhält man den Schrankensatz durch Anwendung des Monotoniesatzes

auf die Funktionen $H(x) := Sx - f(x)$ bzw. $G(x) = f(x) - s \cdot x$.

Hier soll die Herleitung des Schrankensatzes unter stark geometrischen Gesichtspunkten besprochen werden und zwar zuerst für $x_1 = a$ und $x_2 = b$. Den allgemeinen Fall erhält man dann analog.

Bisher ist nach dem lokalen Vergleichssatz für alle $\xi \in [a, b]$ bekannt: Es gibt eine Umgebung $U(\xi)$, so daß $f|_{U(\xi)}$ im offenen Winkelraum W_ξ mit der Spitze in $(\xi, f(\xi))$ und den Randgeraden mit den Steigungen s und S verläuft. Man beginne mit $\xi = a$ (vgl. Figur)



Es sei \tilde{W}_a der rechtsseitige Winkelraum von $(a, f(a))$ aus, der hier nur interessiert. $U(a)$ sei die nach dem lokalen Vergleichssatz existierende Umgebung, in der f in \tilde{W}_a verläuft. Enthält diese nicht b , so wähle man ein $\xi_1 \in U(a)$ ("möglichst weit rechts"). Dann gibt es $U(\xi_1)$, so daß f in $U(\xi_1)$ in W_{ξ_1} verläuft. Der rechtsseitige (Vorwärts-) Winkelraum von W_{ξ_1} sei \tilde{W}_{ξ_1} . Da $(\xi_1, f(\xi_1))$ in \tilde{W}_a liegt und die Randgeraden von \tilde{W}_{ξ_1} parallel zu denen von \tilde{W}_a sind, liegt \tilde{W}_{ξ_1} in \tilde{W}_a . f verläuft daher in $U(a) \cup U(\xi_1)$ in \tilde{W}_a .

Nun könnte man so weiter argumentieren. Gelänge es, auf diese Weise endlich viele Punkte $\xi_0 = a < \xi_1 < \dots < \xi_n$ so zu finden, daß $\xi_{i+1} \in U(\xi_i)$ ($i = 0, \dots, n-1$) und $b \in U(\xi_n)$ ist, so würde gelten: $\tilde{W}_{\xi_{i+1}}$ liegt ganz in \tilde{W}_{ξ_i} , also in \tilde{W}_a . Es gilt daher

$$f(a) + s(b-a) < f(b) < f(a) + S(b-a)$$

oder

$$s(b-a) < f(b) - f(a) < S(b-a),$$

was man beweisen wollte.

Dieselbe Betrachtung gilt für den Monotoniesatz, wobei die \tilde{W}_{ξ_i} offene Viertelebenen mit Randgeraden parallel zu den Achsenrichtungen sind.

Man überlegt sich, daß es genügen würde, endlich viele Zwischenpunkte $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N \leq b$ mit folgenden Eigenschaften zu finden:

- 1) $a \in U(x_0)$; 2) $b \in U(x_N)$; 3) $\forall i=1, \dots, N$ gibt es $z_i \in U(x_{i-1}) \cap U(x_i)$ (mit $x_{i-1} < z_i < x_i$) .

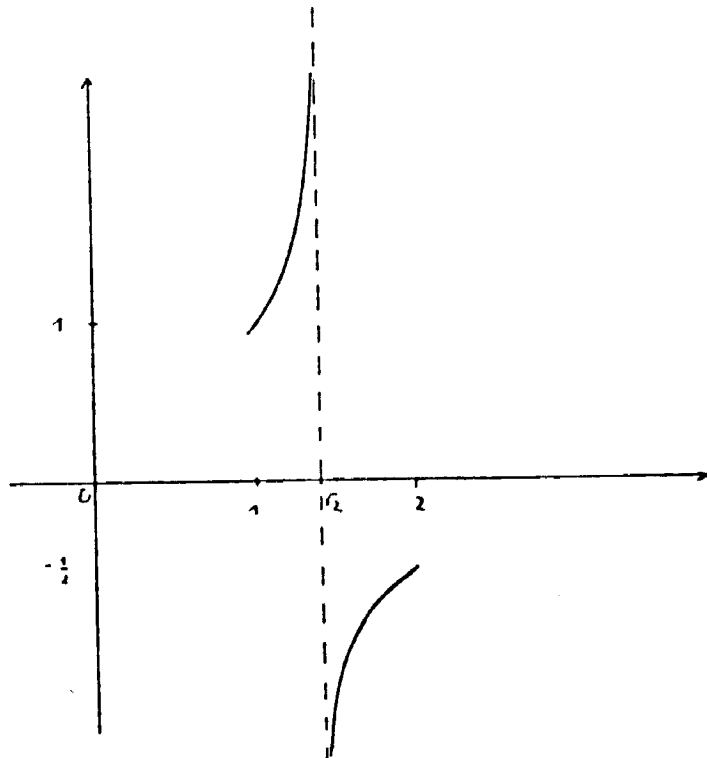
Unter diesen Voraussetzungen liegt $(x_i, f(x_i))$ in $\tilde{W}_{x_{i-1}}$, also in \tilde{W}_a und außerdem liegt $(b, f(b))$ in \tilde{W}_a .

Es bleibt die Frage offen, ob es endlich viele ξ_i bzw. x_j mit den obigen Eigenschaften gibt (so daß die $U(\xi_i)$ bzw. $U(x_i)$ $[a, b]$ in geeigneter Weise überdecken). Dies ist für den Unterricht die schwierigste Stelle, denn es muß herausgearbeitet werden, daß das allein

mit Hilfe der bisher bekannten lokalen Eigenschaften nicht zu leisten ist. Die globalen Eigenschaften differenzierbarer Funktionen sind nur durch das Wechselspiel der lokalen Eigenschaften solcher Funktionen und den topologischen Eigenschaften von \mathbb{R} , nämlich der Vollständigkeitseigenschaft, herzuleiten. Es gibt, wie immer, kein Patentrezept, den Schülern klar zu machen, daß hier Eigenschaften von \mathbb{R} eine große Rolle spielen. Eine Möglichkeit, sie darauf hinzuweisen, ist folgende:

Man betrachte $g : [1,2] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $g(x) := \frac{1}{2-x^2}$.

Über \mathbb{Q} kann die Differenzierbarkeit (mit Hilfe der Ordnungstopologie, die bisher auch für \mathbb{R} verwendet wurde) genau so wie in \mathbb{R} erklärt werden. Es gelten dieselben lokalen Aussagen. Wäre es also gesichert, daß es endlich viele rationale Teilpunkte von $[1,2] \cap \mathbb{Q}$ mit den obigen Eigenschaften gäbe, so müßte g monoton sein, da $g' > 0$ auf $[1,2] \cap \mathbb{Q}$ gilt. g verläuft aber so (vgl. Figur):



Es kann also für $x < \sqrt{2}$ ($x \in \mathbb{Q}$) keine Umgebung $U(x)$ geben, so daß für $g|_{U(x)}$ der lokale Vergleichssatz gilt und daß $U(x)$ Punkte $z > \sqrt{2}$ enthält. Man kann, anschaulich gesprochen, mit Umgebungen $U(x)$ gemäß dem lokalen Vergleichssatz nach dem obigen Verfahren nicht rationale Punkte $z > \sqrt{2}$ erreichen.

Andererseits kann man folgende physikalische Vorbetrachtung für die Gültigkeit der Sätze machen: Ein Wagen, der auf geradliniger Bahn immer mit einer Geschwindigkeit > 0 fährt, hat von a bis b eine Strecke positiver Länge zurückgelegt. Entsprechend für den Schrankensatz: Fährt der Wagen immer mit einer Geschwindigkeit $> s$, so hat er eine größere Strecke zurückgelegt, als wenn er immer mit der constanten Geschwindigkeit s gefahren wäre.

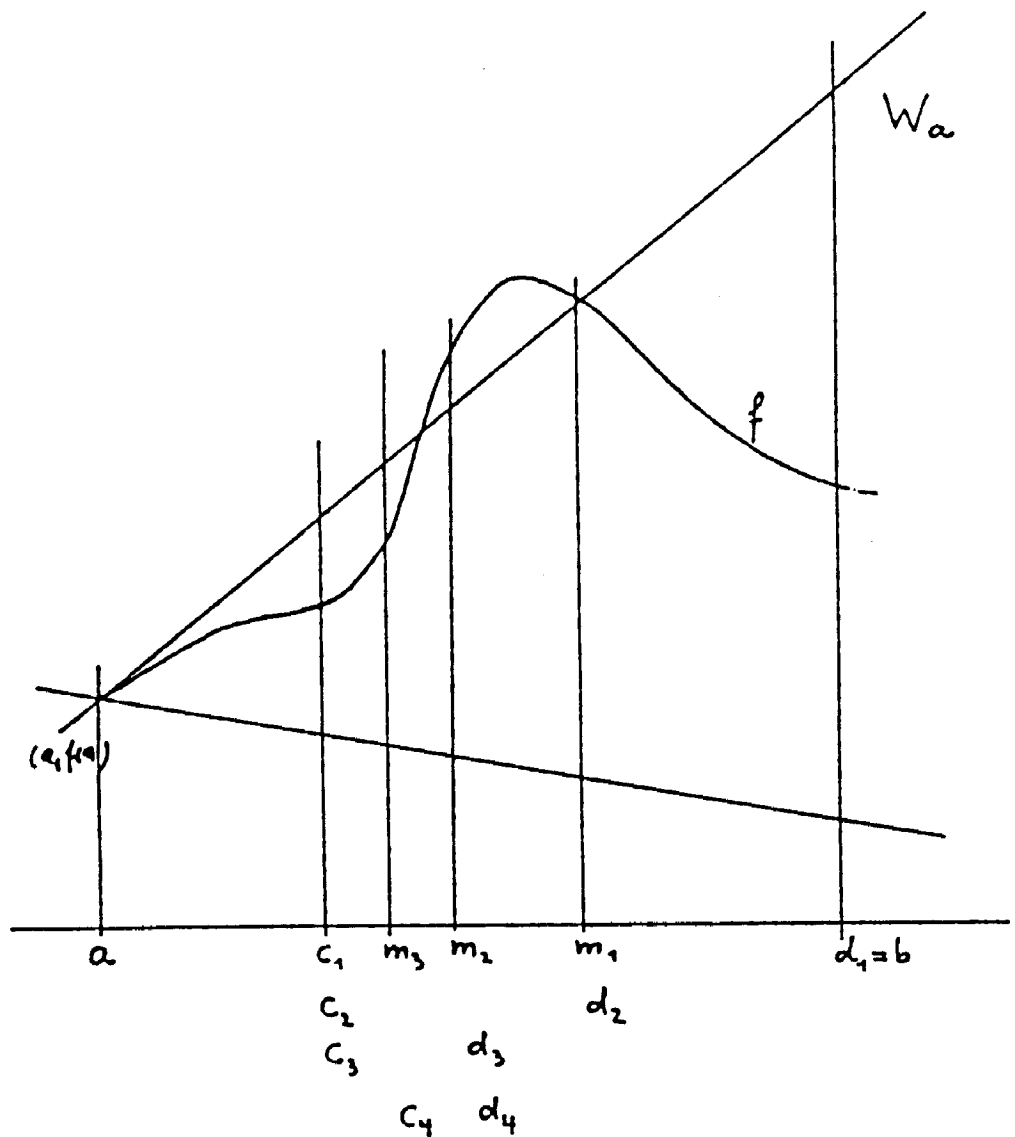
Solche oder andere Betrachtungen sollen das Bewußtsein dafür wecken, daß Eigenschaften von \mathbb{R} eine entscheidende Rolle spielen müssen.

Da man in der Schule die Vollständigkeitseigenschaft von \mathbb{R} nicht in der Form des Heine-Borelschen Überdeckungssatzes zur Verfügung haben wird, wird man die obigen Vorbetrachtungen nicht direkt zu einem Beweis vervollständigen können, wie es mathematisch möglich wäre.

Daher skizziere ich zwei Möglichkeiten des Beweises. Diese können, wenn sie nicht explizit durchgeführt werden, nach Vorbereitungen über die Problematik (wie z.B. oben) auch dazu verwendet werden, den Beweis des Schranken-(Monotonie-) Satzes nur zu skizzieren. In jedem Fall kommt dabei der Kern des Sachverhalts deutlich zum Vorschein.

Bei der ersten Variante wird die Vollständigkeit von \mathbb{R} in der Form der Intervallschachtelungseigenschaft (zusammen mit dem Archimedischen Axiom) verwendet. Wie bei den Vorbetrachtungen weist man nach, daß es $z > a$ gibt, so daß f in $[a, z]$ ganz in \tilde{W}_a liegt (Bezeichnungen wie oben). Ein solches z nenne man c_1 . Gilt dies für $z = b$, so ist man fertig.

Zum indirekten Beweis nehme man an, daß es ein $d_1 \in [a, b]$ gibt, so daß f in $[a, d_1]$ den Winkelraum \tilde{W}_a verläßt (vgl. Figur). Der Einfachheit halber nehmen wir $d_1 = b$.



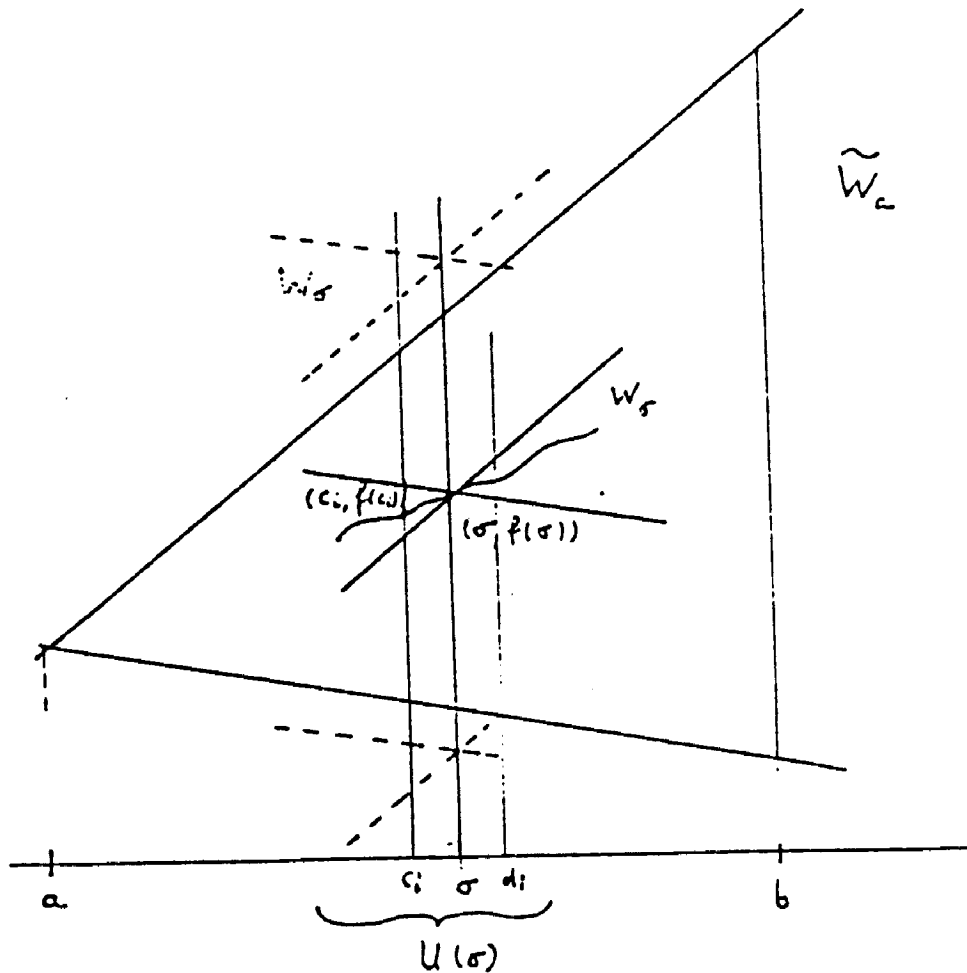
Nun verwende man entweder die Intervallhalbierungsmethode oder die Darstellung der reellen Zahlen als Dezimalzahlen (d.h. fortgesetzte weitere Unterteilung in 10 Teile).

$m_1 := \frac{c_1 + d_1}{2}$ sei der Mittelpunkt von $[c_1, d_1]$.

Verläuft f in $[a, m_1]$ in \tilde{W}_a , so definiert man $c_2 := m_1$ und $d_2 := d_1$, gilt dies nicht, so setze man $c_2 := c_1$ und $d_2 := m_1$.

Bei der Dezimalzahldarstellung wähle man c_2 und d_2 analog der weiteren Unterteilung von 10 Teile, so daß in beiden Fällen gilt: In $[a, c_2]$ verläuft f in \tilde{W}_a , in $[a, d_2]$ nicht. Verfährt man so weiter, erhält man eine Intervallschachtelung (c_i, d_i) , so daß f in $[a, c_i]$ in \tilde{W}_a verläuft, in $[a, d_i]$ aber nicht überall.

$\sigma := \bigcap [c_i, d_i]$ sei das Zentrum der Intervallschachtelung. In σ gilt der lokale Vergleichssatz. Es gibt also eine Umgebung $U(\sigma)$, so daß (mit den obigen Bezeichnungen) $f|_{U(\sigma)}$ in W_σ verläuft.



In $U(\sigma)$ liegen c_i, d_i (mit geeignetem Index i). Nimmt man an, daß $(\sigma, f(\sigma)) \in \tilde{W}_a$ (gestrichelte Situation in der Figur), so läge $(c_i, f(c_i))$ nicht im rückwärtigen Teil von W_σ entgegen $c_i \in U(\sigma)$. $(\sigma, f(\sigma))$ liegt also in \tilde{W}_a . f verläuft (wegen der Definition von σ) dann in $[a, \sigma]$ in \tilde{W}_a .

1. Fall: $\sigma = b$. Dann liegt, wie eben gezeigt,

$(\sigma, f(\sigma)) = (b, f(b))$ in \tilde{W}_a und f verläuft in $[a, b]$ in \tilde{W}_a entgegen der Annahme für den indirekten Beweis.

2. Fall: $\sigma < b$. Da $(\sigma, f(\sigma)) \in \tilde{W}_a$, liegt der rechtsseitige Teil \tilde{W}_σ von W_σ in \tilde{W}_a . Sei $d_i \in U(\sigma)$, dann liegen alle $(x, f(x))$ mit $\sigma \leq x \leq d_i$ in \tilde{W} , also in \tilde{W}_a , so daß f in $[a, d_i]$ in \tilde{W}_a verläuft, entgegen der Definition von d_i .

Will man statt der Intervallschachtelungseigenschaft die Supremum-eigenschaft als Ausdruck für die Vollständigkeit verwenden, so geht man ganz analog vor. Man definiert

$M := \{ z \in [a, b] \mid \forall \xi \in [a, z] : (\xi, f(\xi)) \in \tilde{W}_a \}$.

M ist nicht leer (nach Vorbetrachtung) und nach oben beschränkt.

Sei also $\eta := \sup M$. Dann weist man wie eben nach, daß $(\eta, f(\eta)) \in \tilde{W}_a$. Statt c_i nehme man ein $z \in M$ mit $z \in U(\eta)$, was wegen $\eta = \sup M$ existieren muß.

1. Fall: $\eta = b$. Dann gilt $(\eta, f(\eta)) = (b, f(b)) \in \tilde{W}_a$.

2. Fall: $\eta < b$. Dann zeigt man wie oben, daß f auch in $[a, \bar{z}]$ mit $\bar{z} > \eta$ noch in \tilde{W}_a verläuft, entgegen der Definition von η . Dieser Fall kann also nicht eintreten.

Benutzt man statt der Lage der Punkte $(\xi, f(\xi))$ in W_ξ die Sekantensteigungen in den obigen Beweisen, so erhält man (bei Verwendung der Intervallhalbierungsmethode) das Analogon des bekannten indirekten Beweises für den Monotoniesatz.

Ersetzt man a durch x_1 und b durch $x_2 > x_1$, so hat man den Schrankensatz in der obigen Formulierung bewiesen.

Zur geometrischen (und analytischen) Bedeutung des Schrankensatzes, die in der Schule eingehend erörtert werden sollten:

Die Ungleichungskette

$$s(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1) < S(x_2 - x_1)$$

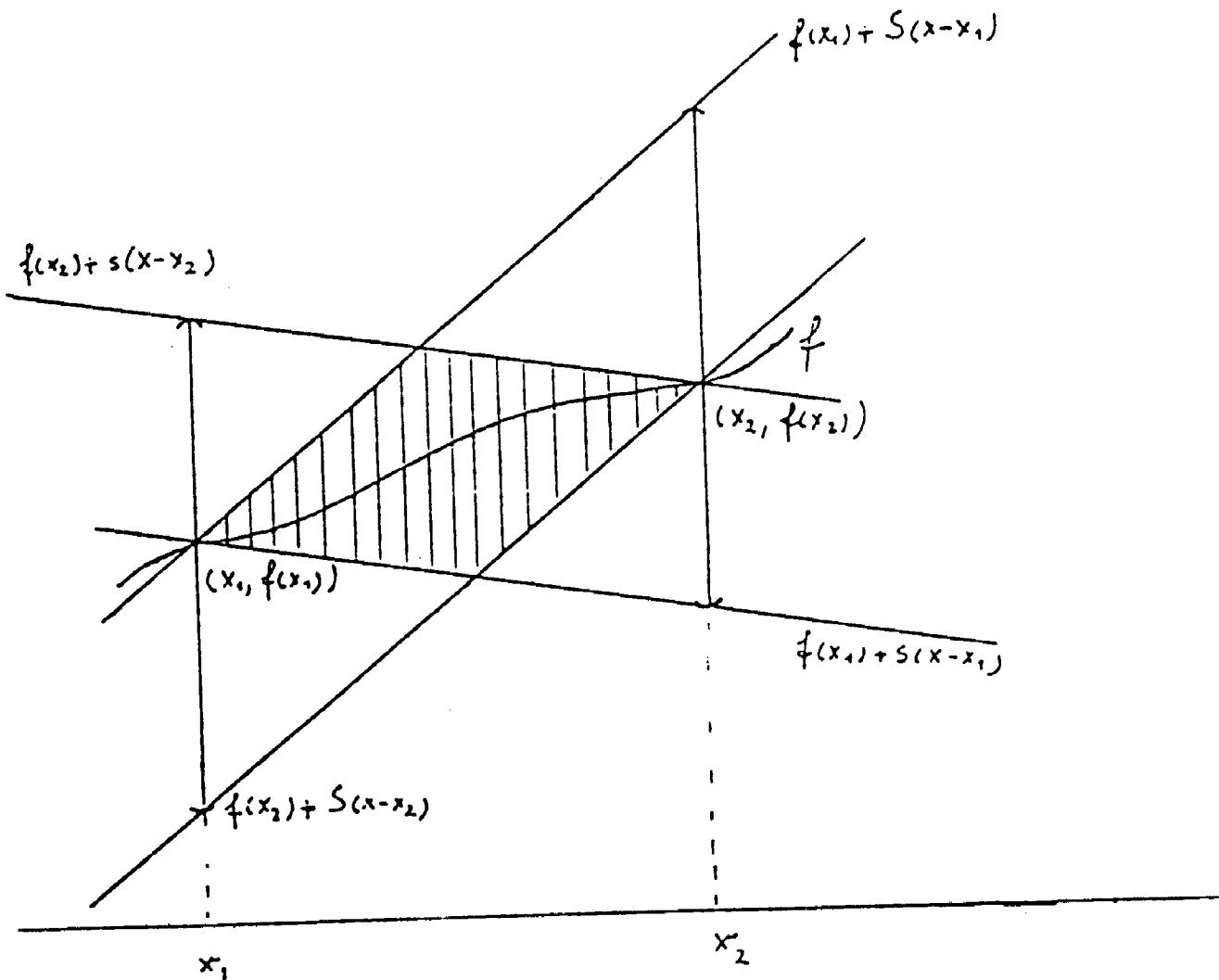
kann in die Gestalt

$$(i) \quad f(x_1) + s(x_2 - x_1) < f(x_2) < f_1(x_1) + S(x_2 - x_1)$$

oder in

$$(ii) \quad f(x_2) + s(x_1 - x_2) > f(x_1) > f(x_2) + S(x_1 - x_2)$$

umgeschrieben werden.



Geometrisch bedeuten (i) und (ii): Von $(x_1, f(x_1))$ aus gesehen, liegt $(x_2, f(x_2))$ im rechtsseitigen Teil \tilde{W}_{x_1} von W_{x_1} und von $(x_2, f(x_2))$ aus gesehen, liegt $(x_1, f(x_1))$ im linksseitigen Teil von W_{x_2} .

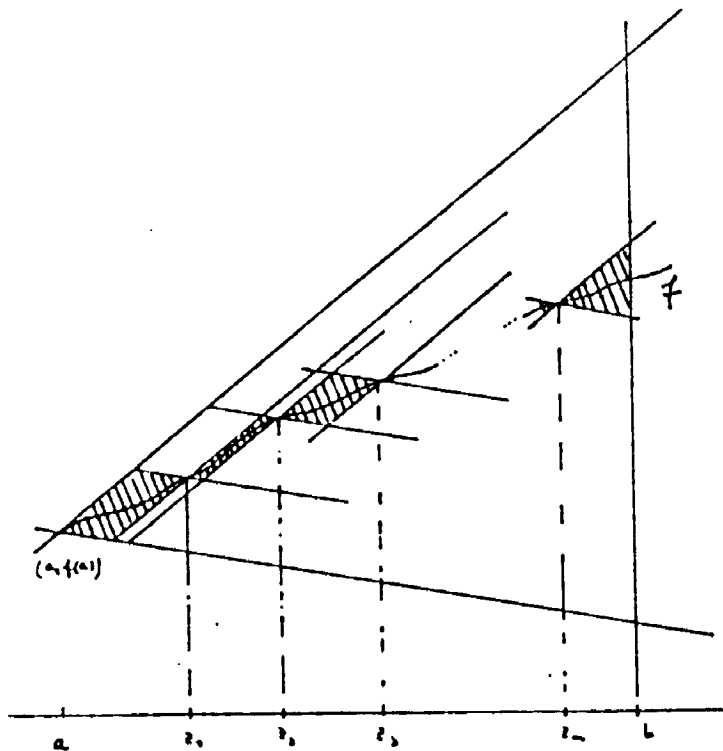
Allgemein gilt also:

Für alle $\xi > x_1$ liegt $(\xi, f(\xi))$ in \tilde{W}_{x_1} ,

für alle $\eta < x_2$ liegt $(\eta, f(\eta))$ im linksseitigen Teil von W_{x_2} .

Zwischen x_1 und x_2 verläuft f demnach im schraffierten Parallelogramm.

Unterteilt man $[a, b]$ durch $a < z_1 < z_2 < \dots < z_m < b$, so verläuft f zwischen z_i und z_{i+1} im entsprechenden Parallelogramm, f also insgesamt im schraffierten Parallelogrammzug (vgl. Figur). Das ergibt einen guten Einblick in den globalen Verlauf von f .



Wichtig ist nun, daß man andere Deutungen des Schranken-(Monotonie-) Satzes bespricht. Diese eröffnen vielseitige Gesichtspunkte für die Weiterführung der Analysis (vgl. die allgemeinen Gesichtspunkte in der Einleitung).

Erste Deutung (die schon kurz angesprochen wurde):

Die umgeschriebenen Ungleichungen (für $x_1 < x_2$)

$$s < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < S$$

besagen: Aus $s < f' < S$ folgt, daß dann auch alle Sekantensteigungen zwischen den Schranken s und S liegen. Bei der Erörterung der Konvexität kann man dies gut verwenden.

Wichtiger ist folgende Deutung (analog (II) beim lokalen Vergleichssatz): Man lese (deute) die Voraussetzung $s < f' < S$ als Vergleich der Ableitungen von $s \cdot x$, $f(x)$, $S \cdot x$ (bzw. $sx + c_1$, $f(x)$, $Sx + c_1$).

Die Folgerung beim Schrankensatz bedeutet dann: Die Zuwächse der Funktionen zwischen x_1 und x_2 erfüllen dieselben Ungleichungen. Der Schranken-(Monotonie-)Satz ist also ein spezieller globaler Vergleichssatz.

Dies gilt allgemeiner:

Globaler Vergleichssatz. $g, f, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar und es gelte auf $[a, b]$: $g' < f' < h'$. Dann gilt für $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$:

$$g(x_2) - g(x_1) < f(x_2) - f(x_1) < h(x_2) - h(x_1).$$

Der Satz ergibt sich z.B. aus dem Monotoniesatz durch Anwendung auf die Funktionen $F := f - g$ bzw. $H := h - f$.

Die sogenannten schwachen Versionen der Sätze, also z.B.

$g' \leq f' \leq h' \Rightarrow$ für $x_1 < x_2$ $g(x_2) - g(x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq h(x_2) - h(x_1)$, erhält man analog der Herleitung des "schwachen" Monotoniesatzes aus dem starken: Man betrachtet dazu bekanntlich unter der Voraussetzung $f' \geq 0$ für alle $\epsilon > 0$ die Funktionenschar $F_\epsilon(x) := f(x) + \epsilon x$.

Aus $F'_\varepsilon > 0$ folgt für $x_1 < x_2$

$$F_\varepsilon(x_2) - F_\varepsilon(x_1) > 0, \text{ also}$$

$$f(x_2) - f(x_1) + \varepsilon(x_2 - x_1) > 0.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt (wegen $(x_2 - x_1) > 0$)

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0.$$

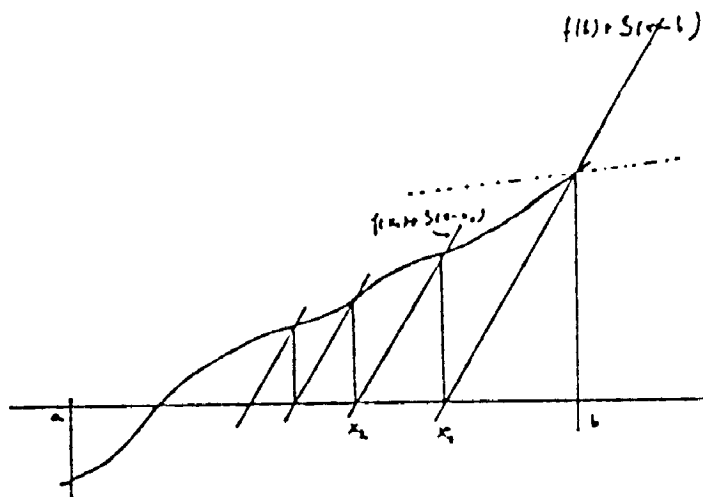
Bem. Der Satz von der Stammfunktion ist bekanntlich eine direkte Folge der globalen Sätze.

4. Anwendungen der globalen Sätze.

Mit Hilfe der globalen Sätze erhält man in bekannter Weise z.B. die hinreichenden Kriterien für innere lokale Extremstellen oder die Sätze über Konvexität. Auch hier kann man anstelle des Mittelwertsatzes den Schrankensatz verwenden. Den globalen Vergleichssatz kann man auch gut zur Behandlung einfacher Differentialgleichungen (z.B. für die Exponentialfunktion oder für Schwingungsgleichung) verwenden. Sehr übersichtlich kann man mit den bisherigen Mitteln in der Schule das modifizierte Newtonverfahren beweisen: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar und es gelte $f' \leq S$. Es sei $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$.

Dann konvergiert die Folge (x_i) mit $x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{S}$ ($x_0 := b$) monoton abnehmend gegen die Nullstelle von f , die b am nächsten liegt (vgl. Figur).

Die Gerade $f(x_i) + S(x - x_i)$ ist nämlich eine Randgerade des linksseitigen Winkelraums W_{x_i} , der beim Schrankensatz auftritt.



$$\begin{aligned}
 x_0: f(b) + S(b-b) = 0 & ; x_1 = b - \frac{f(b)}{S} \\
 x_1: f(x_1) + S(x_1-b) = 0 & ; x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{S} \\
 \vdots & \\
 x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{S} &
 \end{aligned}$$

(*) \searrow gegen Nullstelle von f , die b am nächsten liegt.

Hier sollen noch kurz die Taylorschen Sätze besprochen werden. Sie ergeben sich einfach durch systematische Anwendung der bisherigen Ergebnisse.

Qualitativer Taylorscher Satz (über das lokale Verhalten).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei $(n-1)$ -mal differenzierbar und in $x_0 \in [a, b]$ n -mal differenzierbar.

$$t_{n, x_0}(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

sei das n -te Taylorpolynom.

Dann gilt: t_{n, x_0} approximiert f in x_0 von n -ter Ordnung; d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - t_{n, x_0}(x)|}{|x - x_0|^n} = 0.$$

Für $x < x_0$, $x \in U_\epsilon(x_0)$ gilt (1') mit umgedrehten Ungleichheitszeichen. Bei der Anwendung des globalen Vergleichssatzes drehen sich die Ungleichheitszeichen wegen $x < x_0$ noch einmal um, so daß auch (2) gilt.

(2) deute man als

$$\begin{aligned} & [f^{(n-2)}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} (c-\epsilon)(x-x_0)^3] \\ & \leq f^{(n-3)}(x) \leq [f^{(n-2)}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} (c+\epsilon)(x-x_0)^3] \end{aligned}$$

Nach dem globalen Vergleichssatz gilt dann für $x \in U_\epsilon(x_0)$ mit $x > x_0$

$$\begin{aligned} & f^{(n-3)}(x_0) + f^{(n-2)}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} (c-\epsilon)(x-x_0)^3 \\ & \leq f^{(n-3)}(x) \leq \\ & \leq f^{(n-3)}(x_0) + f^{(n-2)}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} (c+\epsilon)(x-x_0)^3. \end{aligned}$$

Für $x < x_0$ gilt (3) mit umgedrehten Ungleichheitszeichen. Beachtet man $c = f^{(n)}(x_0)$, so erhält man nach dem n.Schritt für $x > x_0$, $x \in U_\epsilon(x_0)$

$$(*) \quad t_{n,x_0}(x) - \frac{\epsilon}{n!} (x-x_0)^n \leq f(x) \leq t_{n,x_0}(x) + \frac{\epsilon}{n!} (x-x_0)^n.$$

Für n gerade gilt (*) auch für $x < x_0$, für n ungerade gilt (*) mit umgedrehten Ungleichheitszeichen.

Insgesamt gilt also: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es $U_\epsilon(x_0)$, so daß für alle $x_0 + x \in U_\epsilon(x_0)$ gilt

$$\frac{|f(x) - t_{n,x_0}(x)|}{|x-x_0|^n} \leq \frac{\epsilon}{n!} \quad \text{q.e.d.}$$

In der Schule wird man mit $n = 2, 3$ beginnen, evtl. auch für den Spezialfall

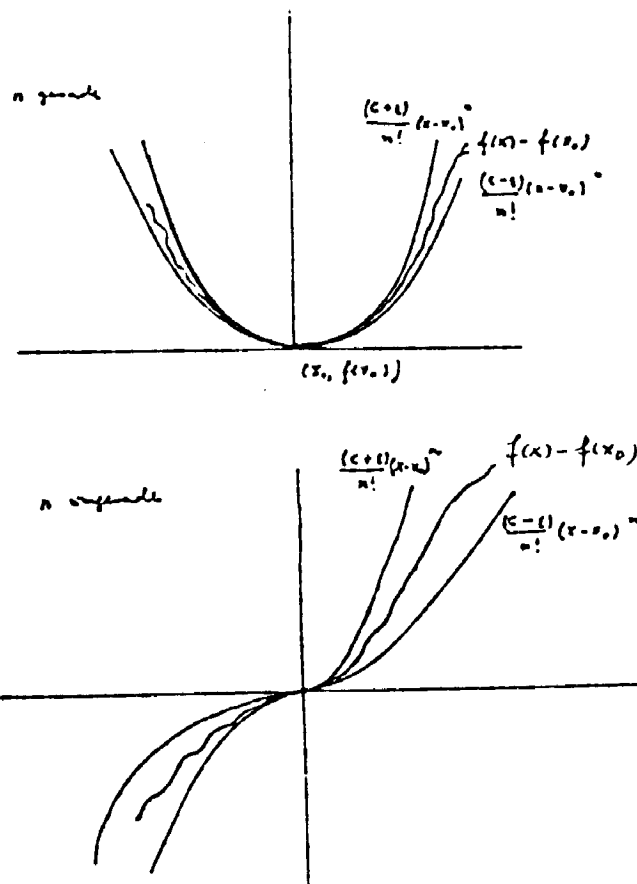
$$f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) = c \neq 0.$$

Auf diesen stößt man bei der Erörterung der Kriterien für Extremstellen. In diesem Fall erhält man in $U_\epsilon(x_0)$:

$$\frac{|f(x) - f(x_0) - \frac{c}{n!}(x-x_0)^n|}{|x-x_0|^n} \leq \frac{\epsilon}{n!}.$$

$f(x) - f(x_0)$ verhält sich also ungefähr wie $\frac{c}{n!}(x-x_0)^n$.

Ist n gerade, so liegt also eine Extremstelle vor. Man vergleiche die Figuren für den Fall $c > 0$.



Für die globale Approximation von f durch das Taylorpolynom (die u.a. zur Berechnung von Funktionswerten wichtig ist), beachte man, daß jetzt die $(n+1)$ -malige Differenzierbarkeit gefordert ist.

Quantitativer Taylorscher Satz.

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei $(n+1)$ -mal differenzierbar und es gelte:

$$s \leq f^{(n+1)} \leq S.$$

Dann gilt:

$$f(x) = t_{n,x_0}(x) + R_n(x) \text{ mit}$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \text{Max}(|s|, |S|).$$

Die Abschätzung des Restgliedes ist analog der nach Lagrange. Daß sie theoretisch gröber ist, ist für praktische Zwecke unerheblich. Will man die Lagrangesche Abschätzung für numerische Zwecke verwenden, muß man ja auch etwas über den Verlauf von $f^{(n+1)}$ in (a,b) wissen.

Den Beweis erhält man nach obigem Muster. Beim ersten Schritt verwendet man gemäß der jetzt globalen Voraussetzung gleich den Schrankensatz:

$$\text{Aus } s \leq (f^{(n)})' \leq S$$

folgt für $x, x_0 \in [a,b]$ mit $x > x_0$:

$$s(x-x_0) \leq f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0) \leq S(x-x_0), \text{ also}$$

$$f^{(n)}(x_0) + s(x-x_0) \leq f^{(n)}(x) \leq f^{(n)}(x_0) + S(x-x_0).$$

Die Anwendung des globalen Vergleichssatzes liefert

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} s(x-x_0)^2 &\leq f^{(n-1)}(x) \leq \\ &\leq f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} S(x-x_0)^2. \end{aligned}$$

Nach weiteren $n-1$ Schritten erhält man

$$t_{n,x_0}(x) + \frac{S}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \leq f(x) \leq t_{n,x_0}(x) + \frac{S}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Der Fall $x < x_0$, so daß sich die Ungleichheitszeichen bei der Anwendung des globalen Vergleichssatzes umdrehen, ist in der obigen Gestalt der Abschätzung von $|R_n(x)|$ enthalten.